

Сулим Г. Концентрація напружень та ефективні механічні характеристики пластинок із подвійно періодичними системами підкріплених отворів / Сулим Г., Пастернак Я., Куцик С. // Вісник ТНТУ. — 2012. — Том 67. — № 3. — С.7-16. — (механіка та матеріалознавство).

УДК 539.3

Г. Сулим<sup>1</sup>, докт. фіз.-мат. наук;  
Я. Пастернак<sup>2</sup>, канд. фіз.-мат. наук;  
С. Куцик<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка

<sup>2</sup>Луцький національний технічний університет

## КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ ТА ЕФЕКТИВНІ МЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛАСТИНОК ІЗ ПОДВІЙНО ПЕРІОДИЧНИМИ СИСТЕМАМИ ПІДКРІПЛЕНИХ ОТВОРІВ

**Резюме.** Використовуючи модифікацію методу граничних елементів, розглянуто подвійно періодичні системи отворів довільної форми із тонкими замкненими та розімкненими накладками. Обчислено концентрацію напружень та ефективні механічні характеристики таких композицій для різних відстаней між круговими отворами, відносних жорсткостей накладки та характеристик анізотропії матеріалу матриці.

**Ключові слова:** отвір, підкріплення, накладка, анізотропія, подвійна періодичність.

H. Sulym, Ia. Pasternak, S. Kutsyk

## STRESS CONCENTRATION AND EFFECTIVE MECHANICAL PROPERTIES OF PLATES WITH DOUBLY PERIODIC SYSTEMS OF ENFORCED HOLES

**Summary.** Modern high-tech devices and machines are designed using mainly composite materials, since the latter are lightweight and provide desired rigidity and durability. A lot of attention is paid to the usage of perforated plates, in which edges of the holes are enforced by thin overlays. Therefore, this study is concerned with the analysis of doubly periodic sets of enforced holes. Based on the previously developed boundary element technique for doubly periodic problems and models of thin overlays, the efficient approach is developed for studying effective properties and stress concentration in perforated plates with enforced holes. The enforcements can be both closed and opened.

First an infinite plate with doubly periodic fully enforced holes is considered. With the increase of the relative rigidity of an overlay, effective elastic moduli of the perforated plate expectedly increase. The smaller is the distance between holes the higher is the increase in effective elastic moduli. It is clear, that in the case of holes without enforcement (or an overlay of a very small rigidity) the closer are the holes, the lower are effective properties of the plate. For an anisotropic plate with holes the increase in rigidity of isotropic overlays gives different change in elastic moduli in different directions. The growth of the effective modulus in a direction perpendicular to fibers is the highest. The thinner is an overlay the more evident is an influence of its bending not only on the effective properties of the composite, but also on the maximal Mises stress in it. In particular, local maxima of Mises stress increases with the decrease of the thickness of enforcements.

With the increase in the relative rigidity of overlays the longitudinal force and bending moment in each overlay also increase. The higher is the distance between holes the higher are the force and bending moment. This behavior should be accounted for during the design of perforated composite plates.

Also the plate with a doubly periodic set of holes with a square lattice is considered. The edge of each hole is conditionally divided into six symmetric and identical parts, three of which are enforced with overlays. For the considered geometrical configuration of the opened reinforcements one of the effective moduli practically does not change with an increase in the rigidity of overlays. At the same time this increase significantly influences another elastic modulus and also effective shear modulus. This behavior is explained by the fact that selected arrangement of overlays "works" for tension/compression in one direction better than in other. Therefore, the usage of opened overlays allows changing effective properties of the perforated plate in the given direction, thus, establishing the desired anisotropy of the material.

*The numerical data obtained using proposed boundary element approach was verified by the commercial finite element software. Relative deviation of both approaches did not exceed 3 %. However, the advantages of the proposed approach are obvious, since it requires only boundary mesh, and no periodic boundary conditions are required to imposed, as they are already incorporated in the boundary integral equations used.*

**Key words:** hole, enforcement, overlay, anisotropy, doubly periodic.

**Вступ.** У сучасних високотехнологічних конструкціях та механізмах найчастіше використовують композитні матеріали, що дають можливість забезпечити відповідні характеристики жорсткості й міцності та істотно зменшують вагу виробу, порівняно із застосуванням традиційних матеріалів [1]. При цьому багато уваги приділяють також використанню полегшених перфорацією пластинчастих елементів зі зміцненими краями отворів.

Дослідженню напружено-деформованого стану та ефективних механічних властивостей пластин із системами отворів стосується широке коло робіт. Зокрема, у монографії [2] описано методи розрахунку на міцність і жорсткість густо перфорованих пластин і оболонок без підкріплень. У роботі [3] побудовано алгоритм дослідження анізотропних пластинок із подвійно періодичними системами тріщин та отворів. Дослідження неперіодичних задач для підкріплених розвантажувальних отворів пластинчастих елементів конструкцій стосуються численні праці А.О. Сяського з учнями, зокрема й [4], розвивають результати ґрунтовних досліджень з тематики, які здійснювали ще у 1950–70-х рр. Г.М. Савін, М.П. Шереметьєв, Н.П. Флейшман, В.В. Божидарнік та інші вчені [5–10]. У монографії [11] методами рядів розглянуто концентрацію напружень в анізотропних пластинках із подвійно періодичними системами пружних кілець. У роботі [12] побудовано алгоритм визначення термонапруженого стану анізотропних пластинок із пружними кільцями. У статті [13] досліджено подвійно періодичні системи тонких неоднорідностей, зокрема й тріщин, в анізотропному середовищі. Проте тематика обчислення ефективних механічних характеристик пластинчастих елементів із подвійно періодичними системами підкріплених (замкненими чи розімкненими ребрами) отворів залишилася практично поза увагою дослідників.

Тому у цій роботі, використовуючи спосіб [13] аналізу подвійно періодичних систем неоднорідностей на основі методу граничних елементів та моделі тонких накладок [14], розроблено ефективний спосіб вивчення напружено-деформованого стану та усереднених механічних характеристик анізотропних пластинчастих елементів конструкцій з подвійно періодичними системами підкріплених замкненими та/чи розімкненими пружними ребрами отворів.

**1. Формулювання та загальна схема розв’язування задачі.** Розглянемо безмежне пружне анізотропне середовище, що містить подвійно періодичну систему отворів, підкріплених пружними ребрами (розімкненими чи замкненими) (рис. 1). При моделюванні композиту використаємо принцип спряження континуумів різної вимірності [15] у поєднанні з узагальненими моделями неідеального контакту середовища та тонких включень [14]. Тобто, накладку описуватимемо пружною лінією, що має певну жорсткість на розтяг, зсув та згин, а пластинку моделюватимемо двовимірним матеріальним континуумом.

За умови трансляційної симетрії задачі система інтегральних рівнянь пружної

рівноваги пластинки з подвійно періодичною системою отворів матиме вигляд [13]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_i^0(\mathbf{y}) = & \int_{\Gamma_0} U_{ij}^{\text{dp}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j^0(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma_0} T_{ij}^{\text{dp}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j^0(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & + u_i^{\text{hom}}(\mathbf{y}, \langle \sigma_{km} \rangle + \sigma_{km}^*), \\ \sigma_{ij}^* = & 2\omega_{x_j}^{(1)} / (\omega_{x_1}^{(1)} \omega_{x_2}^{(2)} - \omega_{x_1}^{(2)} \omega_{x_2}^{(1)}) \times \\ & \times \operatorname{Re} \left\{ B_{i\alpha} / Z_\alpha(\omega^{(1)}) \int_{\Gamma_0} [A_{k\alpha} Z_\alpha(\mathbf{x}) t_k^0(\mathbf{x}) - B_{k\alpha} (n_2 - n_1 p_\alpha) u_k^0(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $u_i^0, t_i^0$  – компоненти векторів переміщень та напружень на базовому отворі (чи групі отворів)  $\Gamma_0$ ;  $\sigma_{ij}$  – компоненти тензора напружень;  $\omega^{(1)} = (\omega_{x_1}^{(1)}, \omega_{x_2}^{(1)})$ ,  $\omega^{(2)} = (\omega_{x_1}^{(2)}, \omega_{x_2}^{(2)})$  – вектори фундаментальних періодів;  $u_i^{\text{hom}}(\mathbf{y}, \sigma_{km})$  – поле переміщень у бездефектному середовищі, що відповідає заданим на безмежності компонентам  $\sigma_{km}$  тензора напружень;  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  – компоненти тензора середніх напружень. У формулах прийняте правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється. Періодично повторюватися може як один підкріплений отвір, так і група різної форми та в різний спосіб підкріплених різнотипними накладками отворів. Ядра інтегральних рівнянь для плоскої задачі теорії пружності анізотропного тіла мають такий вигляд [13]:

$$\begin{aligned} U_{ij}^{\text{dp}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[ A_{i\alpha} A_{j\alpha} \left( \ln(\sigma(u_\alpha)) - \frac{\eta_\alpha^{(1)}}{\omega_\alpha^{(1)}} (u_\alpha)^2 \right) \right], \\ T_{ij}^{\text{dp}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[ A_{i\alpha} B_{j\alpha} (n_2 - n_1 p_\alpha) \left( \zeta(u_\alpha) - \frac{2\eta_\alpha^{(1)}}{\omega_\alpha^{(1)}} u_\alpha \right) \right]; \\ u_\alpha = & Z_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \quad \omega_\alpha^{(k)} = Z_\alpha(\omega^{(k)}); \quad Z_\alpha(\mathbf{x}) = x_1 + p_\alpha x_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут  $\sigma(u_\alpha) = \sigma(u_\alpha | \omega_\alpha^{(1)}, \omega_\alpha^{(2)})$ ,  $\zeta(u_\alpha) = \zeta(u_\alpha | \omega_\alpha^{(1)}, \omega_\alpha^{(2)})$  відповідно сигма- та зета-функції Вейерштрасса;  $\eta_\alpha^{(1)}$  – циклічна стала зета-функції, що означена виразом (23.6.8) [16];  $n_j$  – компоненти вектора одиничної нормалі до поверхні  $\Gamma_0$  у точці  $\mathbf{x}$ . Комплексні сталі  $p_\alpha$  та матриці  $\mathbf{A} \equiv [A_{i\alpha}] = [\mathbf{a}_\alpha]$ ,  $\mathbf{B} \equiv [B_{i\alpha}] = [\mathbf{b}_\alpha]$  визначаються за заданими компонентами тензора пружних сталих із задачі на власні значення формалізму Стро [17].

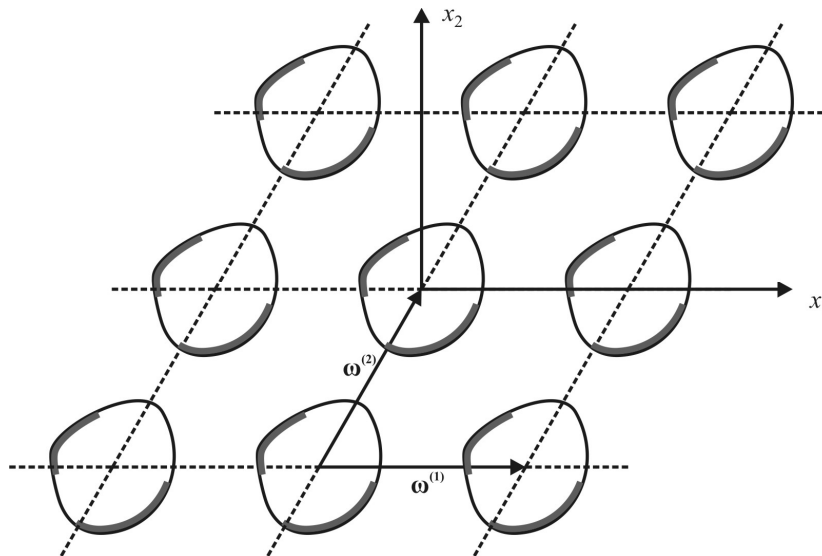


Рисунок 1. Схема задачі  
Figure 1. Sketch of the problem

Відповідно до [14] математична модель тонкої накладки має вигляд

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{y}) = \mathbf{u}^+(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \Sigma \mathbf{u}^i(\mathbf{y}) = \mathbf{F}''(\mathbf{y}, \mathbf{u}^0, \mathbf{t}^0), \quad (3)$$

де  $\mathbf{F}''$  – відомий лінійний інтегральний оператор, розгорнену форму якого та відповідне граничноелементне подання можна знайти, зокрема, у роботі [18].

Інтегральні рівняння (1) сумісно з тією чи іншою моделлю (3) тонкої накладки зручно розв'язувати за запропонованою у роботах [13, 19] схемою методу граничних елементів. При цьому при розгляді замкнених підсилень отворів останні можна моделювати двома поєднаними між собою частинами так, як це зроблено в [20] при описі гіллястих включень. Такий підхід дає змогу не будувати спеціальних моделей замкнених підсилень, а користуватися розробленими і апробованими засобами теорії тонких розіркнених включень.

Використовуючи подану у роботі [13] схему, за знайденими методом граничних елементів значеннями крайових функцій  $u_i^0$ ,  $t_i^0$  можна обчислити концентрацію напружень, середні деформації, а також ефективні механічні характеристики композиту.

Рівняння (1) дають можливість моделювати також ізотропні тіла з подвійно періодичною системою отворів. Проте в ізотропному випадку матриця пружності має кратні власні значення [17, 21], що не дає можливості використовувати ядра (2). Тому ізотропний матеріал слід у цьому разі моделювати слабо анізотропним зі збуреним, скажімо на 0,1 %, модулем зсуву [18].

**2. Числовий аналіз для пластинок із отворами, підсиленими по всій довжині.** Розглянемо безмежну пластинку із подвійно періодичною системою кругових отворів із радіусом  $R$ , підкріплених пружними кільцями завтовшки  $2h = 0,2R$ . Ґратка періодів вважається квадратною зі стороною  $d$ . Відносна відстань між отворами характеризується параметром  $\lambda = 2R/d$ . Пластинка виготовлена або з ізотропного матеріалу з коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0,3$ , або анізотропного, механічні властивості

якого відповідають характеристикам склопластику [22]:  $E_1 = 48,26$  ГПа;  $E_2 = 17,24$  ГПа;  $\nu_{12} = 0,29$ ;  $G_{12} = 6,89$  ГПа. Відносна жорсткість накладок характеризується параметром  $k = G^i/G_{12}$ , де  $G^i$  – модуль зсуву матеріалу підсилення. Коефіцієнт Пуассона матеріалу накладок  $\nu^i = \nu_{12}$ . Схему задачі зображено на врізках до рис. 2. У МГЕ-моделі задачі використано всього 80 граничних елементів.

На рис. 2а наведено значення нормованого ефективного модуля пружності  $\langle E \rangle / E$  для ізотропної пластинки (суцільні лінії), а також модулі  $\langle E_1 \rangle / E_1$  (штрихові криві) та  $\langle E_2 \rangle / E_2$  (штрихпунктир) для анізотропної матриці. Рис. 2б містить залежність максимальних напружень Губера – Мізеса  $\sigma_v^{\max} = \sqrt{\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2}$  (інтенсивність напружень) у пластині на контурі отворів (межі розділу пластина–накладка) для ізотропної (суцільні лінії) та анізотропної (штрихові криві) матриць.

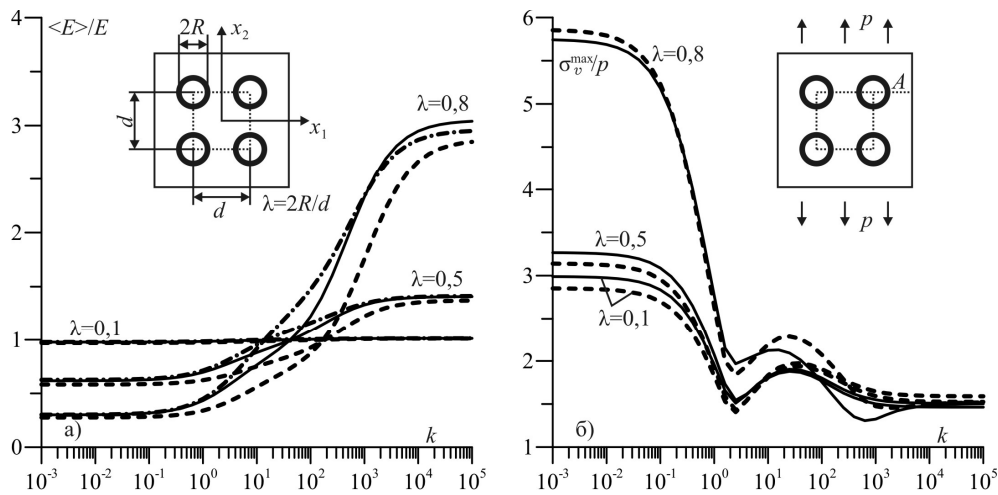


Рисунок 2. Ефективні характеристики (а) та максимальні напруження Губера – Мізеса (б) для перфорованого композиту з підкріпленими отворами

Figure 2. Effective properties (a) and maximal Mises stress (b) in a perforated composite with enforced holes

Із рис. 2а бачимо, що зі збільшенням відносної жорсткості  $k$  накладки ефективні модулі пружності перфорованої пластинки очікувано зростають. При цьому, чим менша відстань між отворами, тим стрімкішим є це збільшення ефективних пружних сталих. Зрозуміло, що у випадку отворів без накладок (практично накладка дуже малої жорсткості, наприклад,  $k < 10^{-3}$ ) збільшення параметра  $\lambda$  зумовлює зменшення ефективного модуля пружності пластинки. Для анізотропної пластинки з отворами збільшення жорсткості  $k$  ізотропної накладки зумовлює різну зміну відношень  $\langle E_1 \rangle / E_1$  та  $\langle E_2 \rangle / E_2$ . При цьому характерним є стрімкіше зростання ефективного модуля в напрямі, перпендикулярному до волокон матриці. Тобто, матеріал робиться жорсткішим, але міра анізотропії композиту в цілому дещо зменшується.

При збільшенні відносної жорсткості  $k$  накладки від нуля до рівня  $k = 1$  максимальні напруження  $\sigma_v^{\max}$  монотонно спадають. При цьому за обраного напрямку

навантаження (уздовж осі  $Ox_2$ ) напруження  $\sigma_v^{\max}$  локалізовані у місці перетину підкріпленого отвору віссю  $Ox_1$  (точка  $A$  на межі контакту накладки з отвором і діаметрально протилежна до неї). Із подальшим збільшенням жорсткості  $k$  накладки напруження  $\sigma_v^{\max}$  спочатку зростають, а потім знову починають зменшуватися. Причому максимуми напружень Губера – Мізеса на підкріпленому контурі вже не лежать на осі  $Ox_1$ , а зміщуються по контуру підкріпленого отвору, роздвоївшись вгору та вниз на кут  $40\text{--}60^\circ$ , залежно від значень параметрів  $\lambda$ ,  $k$  та міри анізотропії матеріалу матриці.

На рис. 3 зображено залежність ефективного модуля пружності та максимальних напружень Губера – Мізеса  $\sigma_v^{\max}$  на контурі підкріплених отворів в ізотропній пластинці для трьох різних значень товщини тонких пружних кілець. Сторона квадратної ґратки періодів дорівнює  $d = 4R$ . Із рис. 3а бачимо, що криві для ефективних модулів при різних значеннях товщини накладки мають майже прямолінійні у логарифмічному масштабі та паралельні одна одній ділянки. Проте для відносних жорсткостей  $k$  підкріплень, що лежать у межах  $1 < k < 10^2$ , криві для різних значень  $h$  розташовані ближче одна до одної, ніж для  $10^2 < k < 10^4$ . Це свідчить про домінування у цих діапазонах відносної жорсткості різних механізмів деформування пружного кільця. Зокрема, при деформуванні підкріплення за механізмом розтягу-зсуву його ефективна жорсткість буде пропорційна до добутку  $h \cdot k$ , у той же час при домінуванні згину ефективна жорсткість пропорційна до  $h^3 \cdot k$ . Тобто, у логарифмічному масштабі при переважанні згинального механізму деформування відповідні криві повинні бути розташовані приблизно у три рази рідше, аніж за домінування механізму розтягу-зсуву. Отже, рис. 3а засвідчує, що зі збільшенням відносної жорсткості підкріплень поступово починає переважати згинальний механізм деформування.

Чим тоншою є накладка, тим виразнішим є вплив її згину, причому не тільки на ефективні характеристики композиції, а й на максимальну інтенсивність напружень у матриці (рис. 3б). Зокрема, локальні максимуми інтенсивності напружень зі зменшенням товщини накладки збільшуються, проте ці максимуми досягаються за щораз вищої не лише відносної жорсткості підкріплення  $k$ , але й зведеної жорсткості на розтяг  $hk/R$ .

При виборі оптимальних характеристик матеріалів пластинки і накладки слід також зважати на те, що зі збільшенням відносної жорсткості  $k$  в накладці виникають щораз більше поздовжнє зусилля  $P$  та згинальний момент  $M$  (рис. 4), які можуть її зруйнувати. Зі збільшенням  $k$  поздовжнє зусилля  $P$  у точці  $A$  (див. візку до рис. 4) монотонно зростає, а згинальний момент  $M$  спочатку дещо зменшується, а потім починає зростати. Чим далі розташовані отвори одне від одного, тим більшими є абсолютні значення зусилля та згинального моменту в кожному обраному перерізі  $A$  накладок.

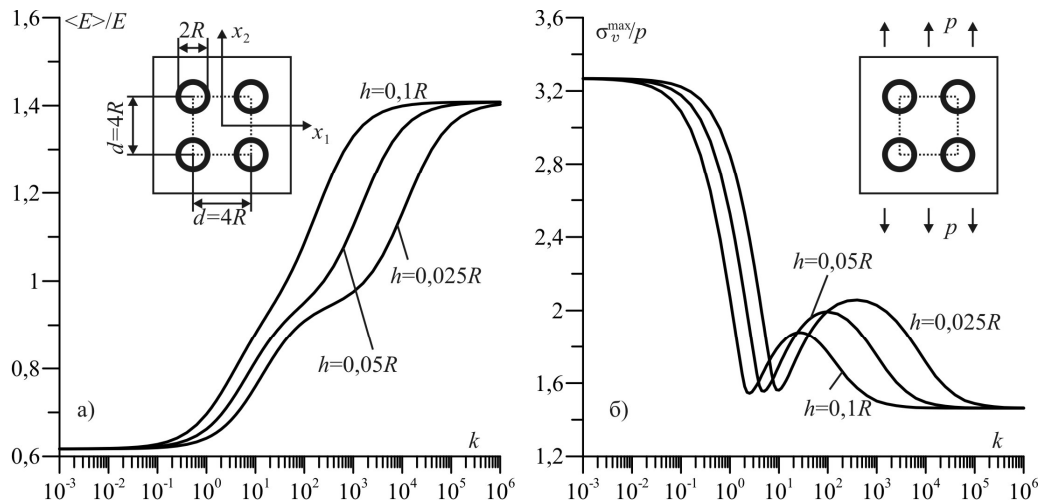


Рисунок 3. Вплив товщини підкріплень на ефективні характеристики (а) та максимальну інтенсивність напружень (б)

Figure 3. Influence of the thickness of reinforcements on the effective properties (a) and maximal Mises stress (b)

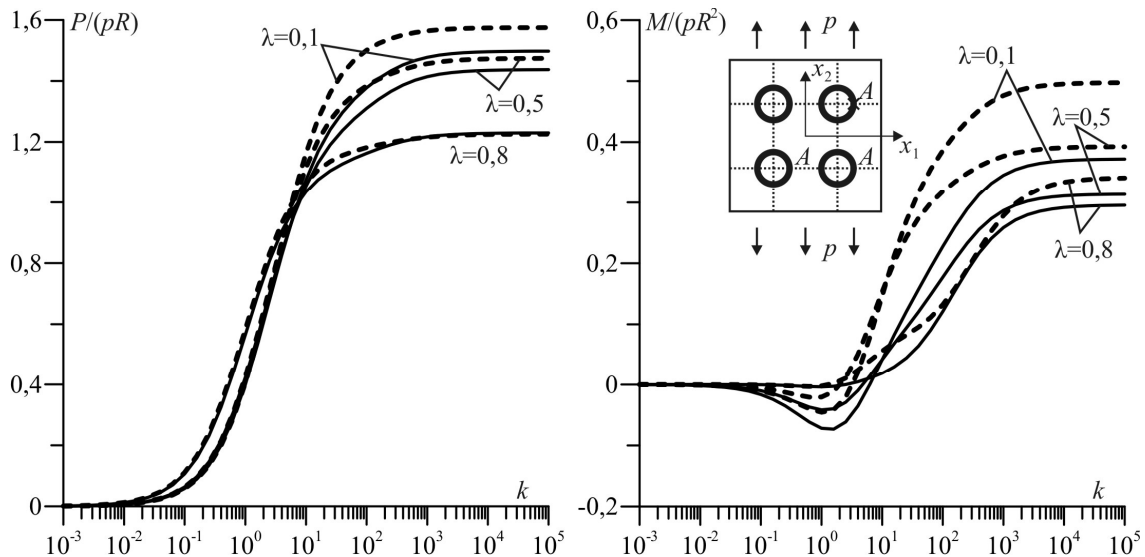


Рисунок 4. Зусилля та згинальний момент у точці A

Figure 4. Force and bending moment at the point A

Числові дані запропонованого підходу були верифіковані за допомогою методу скінченних елементів у програмі Abaqus (некомерційна ліцензія Abaqus Student Edition). При цьому розглядалася пластинка з 64 підкріпленими отворами (урахування симетрії дає можливість звести кількість отворів у скінченно-елементній моделі відповідної задачі до 16). Навантаження задавалося на зовнішній межі пластинки. Середні значення деформацій обчислювалися на межі одного з чотирьох центральних представницьких елементів. Для достатньо адекватного опису згину тонких підкріплювальних кілець останні описувалися за допомогою двох шарів квадратичних скінченних елементів. Отримано добру узгодженість результатів. Відносне відхилення обчислених двома способами значень ефективних характеристик композиції не перевищило 3 %.

Також запропонованим підходом досліджено подані у монографії [11] задачі для подвійно періодичних систем підкріплених отворів у анізотропній пластинці з авіаційної фанери. Отримані числові дані добре узгоджуються із представленими у праці [11] графіками. При накладанні відповідних рисунків криві практично збігаються.

**3. Числовий аналіз для регулярних систем отворів з розімкненими накладками.** Велике зацікавлення у дослідників викликають задачі механіки для тіл із отворами, що є частково підкріпленими [4]. Це зумовлено їхньою підвищеною практичною важливістю, бо виконання повного підкріплення у більшості випадків дорожче і технологічно складніше. Наскільки відомо авторам подвійно періодичні задачі такого типу до цього часу не вивчалися і навіть не формулювалися. Тому розглянемо пластинку із подвійно періодичною системою круглих отворів із радіусом  $R$ , центри яких формують квадратну ґратку зі стороною  $d$ . Контур кожного з отворів умовно поділено на шість симетричних однакових частин, три з яких підкріплені накладками завтовшки  $2h$  ( $h=0,1R$ ), як зображено на врізці до рис. 5. Матеріал пластинки є або ізотропним із коефіцієнтом Пуассона, що дорівнює 0,3, або анізотропним із такими ж, як і в попередньому прикладі, механічними властивостями.

Відомо, що на кінцях розімкнених пружних підсилень поодиноких отворів поля напружень мають кореневу особливість [4]. Те саме стосується і відповідних подвійно періодичних задач. Проте врахування кореневої особливості має визначальний вплив на оцінку локального напружено-деформованого стану біля краю неоднорідності, а відтак – на локальні процеси перебігу пластичного деформування чи руйнування у цій зоні, проте на середній рівень напружень і деформацій (а відтак, і на обчислені значення ефективних сталих) цей вплив повинен бути дуже малим [13]. Тому, оскільки при розв'язуванні сформульованої задачі увага була зосереджена на вивченні ефективних механічних властивостей перфорованого композиту із подвійно періодичними системами підкріплених отворів, то для спрощення обчислювальної схеми при визначенні напружено-деформованого стану системи коренева особливість напружень на кінцях накладок якимось спеціально не враховувалася. При цьому використовувалися звичайні розривні квадратичні граничні елементи, які довели свою ефективність при вивченні тонких включень [18], на кінцях яких також формується згадана особливість. При числовому моделюванні задачі за допомогою МГЕ використано 60 граничних елементів.

На рис. 5 зображено залежність ефективних модулів пружності  $\langle E_1 \rangle / E_1$  (суцільні криві),  $\langle E_2 \rangle / E_2$  (штрих-пунктир) та модуля зсуву  $\langle G_{12} \rangle / G_{12}$  (штрихові лінії) для ізотропної та анізотропної матриць із подвійно періодичними системами частково підкріплених отворів від відносної жорсткості  $k$  накладок та параметра  $\lambda = 2R/d$  відстані між отворами.

Із рис. 5 бачимо, що для розглянутої конфігурації розімкнених підкріплень ефективний модуль пружності  $\langle E_1 \rangle$  зі збільшенням жорсткості  $k$  накладки практично не змінюється. Натомість остання має вплив на зміну модулів  $\langle E_2 \rangle$  та  $\langle G_{12} \rangle$ . Це пов'язано з тим, що обране розташування накладок краще працює на розтяг-стиск уздовж осі  $Ox_2$ , ніж  $Ox_1$ . Отже, використання розімкнених накладок дає можливість



продуктивніше змінювати ефективні характеристики перфорованої пластинки в заданому напрямі, формуючи у такому композиті навіть із ізотропною матрицею бажану міру анізотропії. Для випадку анізотропної матриці вплив відстаней між отворами на ефективні характеристики істотніший, ніж для ізотропної.

Отримані числові дані також були верифіковані за допомогою застосування до вивчення розглянутої задачі методу скінченних елементів. Відносне відхилення результатів застосування двох методів не перевищило 3 %.

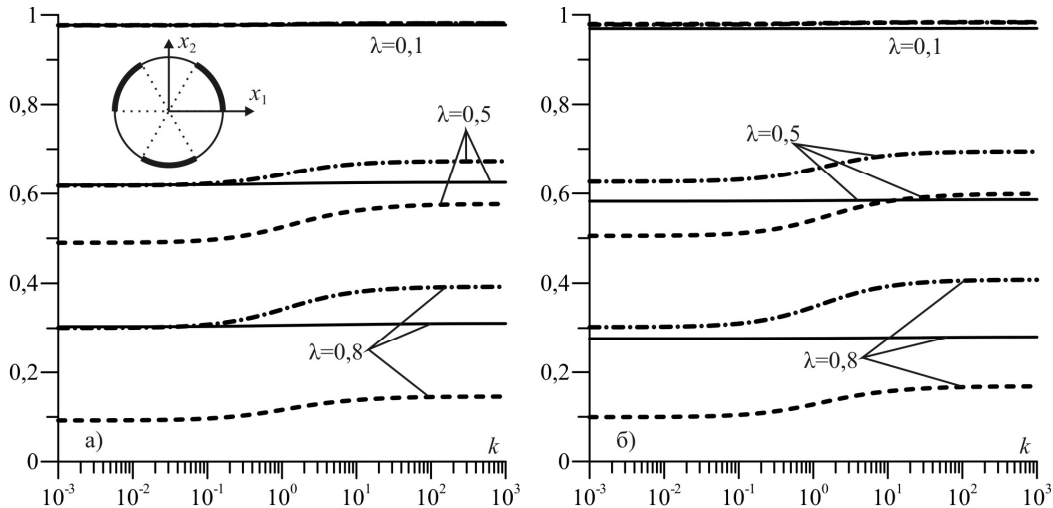


Рисунок 5. Ефективні характеристики перфорованих композитів із розімкненими підкріпленнями

отворів: а) ізотропна матриця; б) анізотропна матриця

Figure 5. Effective properties of perforated composites with opened reinforcements of holes: a) isotropic matrix; b) anisotropic matrix

**Висновки.** Використання у перфорованих пластинках замкнених підкріплювальних накладок на отворах дає можливість значно знизити концентрацію напружень на них та збільшити ефективні механічні характеристики такої композиції. При виборі оптимальних характеристик матеріалів пластинки і накладки слід зважати на те, що максимальні напруження Губера – Мізеса на контурі отворів у своїй залежності від відносної жорсткості підкріплень змінюються немонотонно, а також змінюють свою локалізацію. При проектуванні такого композиту слід враховувати також розтягувальні зусилля та згинальні моменти у накладках, які за певних умов можуть зруйнуватися чи відшаруватися від матриці.

У разі розімкнених накладок ефективні механічні характеристики композиції залежать від геометричної конфігурації задачі ще більшою мірою. Використання таких підкріплень дає при проектуванні композиту ширші можливості змінювати ефективні модулі у бажаному напрямі, тобто формувати необхідну конструкційну анізотропію.

**Conclusions.** The usage of perforated plates with closed enforcing overlays at holes allows significant reduction of the stress concentration and increase of the effective mechanical properties of such composites. The choice of the optimal properties of plate's and reinforcements' materials should take into account that the maximal Mises stress at holes' boundary does not depend monotonically on the relative stiffness of reinforcements, and changes its location. The design of the composite should account for the tensile force and bending moments in the overlays, which under certain conditions can fracture or delaminate from the matrix.

In the case of opened overlays, the effective mechanical properties of such composites essentially depend on the geometric configuration of the problem. The usage of such reinforcements gives wider opportunities for designing of composites with given effective moduli in the desired direction, i.e., to form the necessary structural anisotropy.

### Список використаної літератури

1. Moskowitz, S.L. The advanced materials revolution: technology and economic growth in the age of globalization / S.L. Moskowitz. – Wiley, 2009. – 280 p.
2. Григолюк, Э.И. Перфорированные пластины и оболочки [Текст] / Э.И. Григолюк, Л.А. Фильштинский. – М.: Наука, 1970. – 556 с.
3. Максимович, О.В. Двоперіодичні задачі теорії пружності для анізотропних пластинок із тріщинами [Текст] / О.В. Максимович // Наукові нотатки. – 2011. – Вип. 33. – С. 136–143.
4. Сяський, А.О. Часткове симетричне підсилення криволінійного отвору в нескінченній пластинці [Текст] / А.О. Сяський, Ю.В. Батишкіна // Вісник ТДТУ. – Т. 9, № 2. – 2004. – С. 5–12.
5. Савин, Г.Н. Концентрация напряжений около отверстий [Текст] / Г.Н. Савин. – М.: Гос. изд-во тех.-теор. л-ры, 1951. – 496 с.
6. Савин, Г.Н. Распределение напряжений около отверстий [Текст] / Г.Н. Савин. – К.: Наукова думка, 1968. – 888 с.
7. Шереметьев, М.П. Пластины с подкрепленным краем [Текст] / М.П. Шереметьев. – Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1960. – 258 с.
8. Савин, Г.Н. Пластины и оболочки с ребрами жесткости [Текст] / Г.Н. Савин, Н.П. Флейшман. – К.: Наукова думка, 1964. – 384 с.
9. Савин, Г.Н. Пластины, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками [Текст] / Г.Н. Савин, В.И. Тульчий. – К.: Наукова думка, 1971. – 268 с.
10. Божидарник, В.В. Двовимірні задачі пружності й термопружності структурно-неоднорідних тіл [Текст] / В.В. Божидарник. – Львів: Світ, 1998. – 352 с.
11. Космодамианский, А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями [Текст] / А.С. Космодамианский. – К.: Выща школа, 1976. – 200 с.
12. Калоеров, С.А. Термоупругое состояние анизотропной пластинки с упругими кольцами [Текст] / С.А. Калоеров, Д.А. Добряк // Теорет. и прикл. мех. – 2009. – Вип. 46. – С. 155–168.
13. Пастернак, Я. Регулярні системи тонких неоднорідностей в анізотропному тілі [Текст] / Я. Пастернак, Г. Сулим // Вісник ТНТУ. – 2011. – 16. – № 3. – С. 49–56.
14. Пастернак, Я.М. Моделі тонких неоднорідностей з урахуванням можливості їхнього неідеального контакту з середовищем [Текст] / Я.М. Пастернак, Г.Т. Сулим // Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка». – 2011. – Вип. 15, Т. 2, №5. – С. 200–210.
15. Сулим, Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями [Текст] / Г.Т. Сулим. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
16. NIST Handbook of Mathematical Functions / F.W. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark. – New York: Cambridge University Press, 2010. – 951 p.
17. Ting, T.C.T. Anisotropic elasticity: theory and applications / T.C.T. Ting. – New York: Oxford University Press. – 1996. – 567 p.
18. Пастернак, Я.М. Дуальний метод граничних елементів для задач теорії тонких включень [Текст] / Я.М. Пастернак, Г.Т. Сулим // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53. – № 2. – С. 46–57.
19. Pasternak, Ia. Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities / Ia. Pasternak // Engng. Anal. Bound. Elem. – 2011. – 35, No. 4. – P. 678–690.
20. Пастернак, Я. Плоска задача теорії пружності анізотропного тіла з тонкими гіллястими пружними включеннями / Я. Пастернак, Г. Сулим // Вісник ТНТУ. – 2011. – 16. – № 4. – С. 23–31.
21. Лехницький, С.Г. Теория упругости анизотропного тела [Текст] / С.Г. Лехницький. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
22. Pan, E. A general boundary element analysis of 2D linear elastic fracture mechanics / E. Pan // Int. J. Fract. – 1997. – 88 – P. 41–59.

Отримано 27.06.2012